Université d'Oran1, Ahmed Ben Bella

Faculté des sciences exactes et appliquées

Cours

ANALYSE FONCTIONNELLE ET EDP

Réalisé Par :

- MESSIRDI Sofiane
- BENNOUR Abdelaziz

Année Universitaire 2023 – 2024

Introduction

Ce support pédagogique intitulé ”Analyse Fonctionnelle et Équations aux Dérivées Partielles (EDP)” est destiné aux étudiants du L3 et de première année de Master de mathématiques fondamentales et appliquées.

L'analyse fonctionnelle permet d'étudier les propriétés des fonctions et des opérations sur ces fonctions, telles que la continuité, la différentiabilité, l'intégrabilité, etc. Elle permet également de définir des normes et des distances sur les espaces fonctionnels, ce qui permet de mesurer la proximité entre les fonctions.

Les espaces fonctionnels sont des espaces vectoriels munis d'une structure supplémentaire qui permet de définir des notions de convergence et de continuité. Ces espaces sont utilisés en mathématiques pour étudier des fonctions et des opérateurs.

Il existe différents types d'espaces fonctionnels, tels que les espaces de fonctions continues, les espaces de fonctions intégrables, les espaces de fonctions dérivables, etc. Chaque type d'espace fonctionnel est défini par des critères spécifiques, tels que des conditions de régularité ou des propriétés de convergence.

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basés sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers les EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

On peut difficilement étudier les EDP dans une totale généralité comme on peut le faire pour les équation différentielles ordinaires (EDO) le domaine étant trop vaste. Heureusement, les EDP les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes : convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère, diffusion de la chaleur dans un solide, le son dans l'air, vibration des structures, calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces .

On appelle problème aux limites, une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière ou bord du domaine sur lequel elle est posée. Le problème est bien posé si pour toute donnée (2ème membre, domaine, données au bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continûment de la donnée.

Le cours est constitué de quatre chapitres dans un premier temps nous rappelons quelques notions et résultats d'analyse fonctionnelle de base (espaces L^p, inégalité de Cauchy Schwartz, Inégalité de Poincarré,...).

Le chapitre deux est dédié à quelques espaces fonctionnels notament les espaces de Sobolev et les espaces de Schwartz.

Dans le troisième chapitre on introduit la formulation variationnelle, existence et unicité de solution de certains problèmes elleptiques, régularité de solutions ainsi que l'étude spectrale de Laplacien.

Au dernier chapitre, on traite des problèmes d'évolution pour l'équation de la Chaleur et l'équation des Ondes.

Chapitre 1

Généralités

Les mathématiques sont une discipline fondamentale qui étudie les structures, les quantités, les espaces et les changements. Dans ce chapitre, nous aborderons quelques généralités mathématiques essentielles pour comprendre les concepts et les méthodes qui seront développés par la suite. Nous ennocerons notamment les espaces L^p, formule de Green, des rappels d'analyse et la transformée de Fourier.

1.1 Espace L^p

Les espaces de Lebesgue sont des espaces fondamentaux en théorie de l'intégration. Soit Soit $(\Omega, \mathcal{B}, x)$ un espace mesuré et $p \geq 1$ un réel. On appelle espace de Lebesgue $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ qui sont mesurables et qui vérifient

$$\int_\Omega |f|^p dx < +\infty$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est muni de la semi-norme

$$\|f\|_p = \int_\Omega |f|^p dx < +\infty\}$$

Ce n'est en général pas une norme. Par exemple, si $(\Omega, \mathcal{B}, x)$ est $\mathbb{R}$ muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue, la fonction valant 1 en un point x_0 et nulle ailleurs a une norme égale à 0 sans être identiquement nulle. Pour faire de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ un espace normé, il faut identifier les fonctions qui sont égales presque partout: l'ensemble des classes d'équivalence modulo cette relation est noté $L^p(\Omega)$. C'est un espace de Banach pour la norme précédente.

En général si $1 \leq p < +\infty$, $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable, $\|f\|_p = \int_\Omega |f|^p dx < +\infty\}$, $(L^p(\Omega), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
Si

$$p = +\infty,\ L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable, } \exists c > 0,\ |f| \leq c\ p.p\}$$

munide la norme $\|f\|_\infty = \inf\{c\ /\ |f(x)| \leq c\ p.p\}$. $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.
Pour $1 \leq p \leq +\infty$, p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ est appelé le conjugué de p.
Seul l'espace $L^2(\Omega)$ est hilbertien avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Proposition 1.1.1 *Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité:*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 1.1.1 *Montrer que si Ω est de mesure finie alors $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q$ si $q \leq p$. Donner un contre exemple de cette inclusion lorsque Ω n'est pas de mesure finie.*

Si $p < \infty$ (donc $q < \infty$). Soit $f \in L^p(\Omega)$. Comme $\frac{p}{q} \geq 1$, considérons son conjugué $\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p}{p-q}$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^q dx = \int_\Omega |f|^q 1 dx &= \left(\int_\Omega (|f|^q)^{\frac{p}{q}}\, dx\right)^{\frac{q}{p}} \times \left(\int_\Omega (1)^{\frac{p}{p-q}}\, dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \times \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{p}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Si $p = \infty$. On considére $M > 0$ tel que $\mu\{x \in \Omega \;/\; |f(x)| > M\} = 0$, alors

$$\int_\Omega |f|^q dx \leq \int_\Omega M^q \mu(\Omega) < \infty.$$

Dans tout les cas on a obtenu $f \in L^q(\Omega)$, ce qui montre l'inclusion demandée.
Cette inclusion n'est pas vraie en générale car si $\Omega = \mathbb{R}$ et $f \equiv 1$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.1.1 *(De Fubini[2])*
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^N$. Alors pour presque tout $x \in \Omega_1$, $F(x,.) \in L^1(\Omega_2)$ et pour presque $y \in \Omega_2$, $F(.,y) \in L^1(\Omega_1)$. De plus on a, en notant $d(x,y) := dx \otimes dy$:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)d(x,y) = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dydx = \int_{\Omega_2}\int_{\Omega_1} F(x,y)dxdy.$$

Preuve 1.1.1 *voir [2].*

On admet les résultats de la proposition suivante

Proposition 1.1.2 *([2]) Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$:*

1. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, le dual de $L^p(\Omega)$ s'identifie à $L^{p'}(\Omega)$ de la façon suivante: à toute forme linéaire continue T sur $L^p(\Omega)$ on peut associer de façon unique une fonction $f \in L^{p'}(\Omega)$ telle que:*

$$\langle T, u\rangle_{L^{p'}(\Omega),L^p(\Omega)} = \int_\Omega f(x)u(x)dx, \ \ \forall u \in L^p(\Omega).$$

   Le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$ et s'identifie à l'espace de mesure de Radons sur Ω.

2. *L'espace des fonctions continues sur Ω à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$. En fait l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact, qu'on va définir dans le paragraphe suivant, est aussi dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

1.2 Formule de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des EDP, elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.2.1 *(Formule d'Ostrogradsky [1])*
Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. Soit F une fonction de $C^1(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ (un champ de vecteurs). Alors:

$$\int_\Omega div(F(x))dx = \int_\Gamma F(x).n(x)d\Gamma.$$

Remarque 1.2.1 *Dans cette formule, $n(x)$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point x, dirigé vers l'extérieur de Ω.*

Corollaire 1.2.1 *(Formule de Green) Soit Ω un ouvert régulier de classe C^1. Soit u une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ et v une fonction de $C^1(\Omega)$. Alors elles vérifient la formule d'intégration par parties*

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\sigma - \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx.$$

Où $\frac{\partial u}{\partial n} = \overrightarrow{\nabla u}.\overrightarrow{n}$ est la dérivée normale de u, $\Gamma = \partial\Omega$ et $d\sigma$ l'élément d'aire sur Γ.

1.3 Rappels d'analyse

Notation

On notera $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^T$ les éléments de $\mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N},\ N \geq 1)$, $|x| := \sqrt{x_1^1 + ... + x_N^2}$ est la norme euclidienne de x et $B(x, \mathbb{R})$ est la boule ouverte de centre x et de rayon R. Nous désignerons par $\mathbb{R}^N_+$ le demi-espace de $\mathbb{R}^N$. Plus précisément notant $x' := (x_1, ..., x_{N-1})^T$ les éléments de $\mathbb{R}^{N-1}$ et $x := (x', x_N)^T$ ceux de $\mathbb{R}^N$, on pose:

$$\mathbb{R}^N_+ := \{(x', x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : \ x_N > 0\}.$$

Un vecteur $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N \in \mathbb{N}^N$ est appelé un multi-indice et $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$ est la longueur du multi-indice. Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ régulière, on note:

$$D^\alpha F(x) := \frac{\partial^{|\alpha|}F(x)}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_N}x_N}.$$

Si $\alpha := (0, ..., 0)^T \in \mathbb{N}^N$, on adopte la convention $D^\alpha F(x) := F(x)$. De même, on notera pour tout $x := (x_1, ..., x_N)^T \in \mathbb{R}^N$:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_N^{\alpha_N}.$$

Espaces des distibutions

L'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est noté $\mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions test). On dira que une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si:

1. Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ contenant les supports de toutes les fonctions u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in K} |D^\alpha u_n(x) - u(x)| = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout α multi-indice.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et K un compact inclus dans Ω. On note $\mathcal{D}(\Omega, K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ à support inclus dans K,

$$\mathcal{D}(\Omega, K) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : supp\varphi \subseteq K\}$$

$\mathcal{D}(\Omega, K)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Omega)$ et on a:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{K \text{ compact, } K\subset\Omega} \mathcal{D}(\Omega, K).$$

L'espace des distributions à support sur Ω est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, on le note $\mathcal{D}'(\Omega)$. Rappelons que une distribution sur Ω est une forme linéaire T de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall K$ compact inclus dans Ω, $\exists M_K > 0$, $m_K \in \mathbb{N}$, tel que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq M_K \sum_{|\alpha|\leq m_K} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega, K).$$

Exemple 1.3.1 $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$, $\langle T_f, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ *où* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *sont des distributions sur* Ω *appelées respectivement la distribution de Dirac concentrée au point* a *de* Ω, *et la distribution associée à la fonction* f.

Si les T_j forment une suite de distributions telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_j, \varphi\rangle$ converge, alors la suite T_j converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, soit vers T, et on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{j\to+\infty} \langle T_j, \varphi\rangle.$$

Exemple 1.3.2

$$f_j(x) = \begin{cases} j^2(\frac{1}{j} - |x|), & si\ |x| \leq \frac{1}{j}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On aura

$$\langle T_{f_j}, \varphi\rangle = \int_{-\frac{1}{j}}^{0} j^2 \left(\frac{1}{j} + x\right) \varphi(x)dx + \int_0^{\frac{1}{j}} j^2 \left(\frac{1}{j} - x\right) \varphi(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (1 + y)\, \varphi\left(\frac{y}{j}\right) dy + \int_0^1 (1 - y)\, \varphi\left(\frac{y}{j}\right) dy$$

et par conséquent $\langle T_{f_j}, \varphi\rangle \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle$, *soit* $T_{f_j} \to \delta$.

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, on définit la dérivée $D^\alpha T$ comme étant

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est une application continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple 1.3.3 *La fonction de Heaviside* $H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$, *(la fonction caractéristique de* $[., +\infty[$*). H n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais on peut lui faire correspondre une distribution sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est localement intégrable. On note $[H] = H$,*

$$\begin{aligned} [H] : &\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ &\varphi \to \langle [H], \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \end{aligned} \tag{1.1}$$

donc $\frac{dH}{dx} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec

$$\langle \frac{dH}{dx}, \varphi \rangle = -\langle [H], \frac{d\varphi}{dx} \rangle = -\int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}(x)dx = [\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

où δ_0 est la distributionde Dirac sur $\mathbb{R}$ concetrée en 0, $\frac{dH}{dx} = \delta_0$.

Si la fonction f est régulière sur chacun des segments $[a_i, a_{i+1}]$, (et donc localement intégrable), alors la dérivée de f au sens des distributions est donnée par:

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_i \left(f(a_i^+ - f(a_i^-) \right) \delta_{a_i},$$

où f' est la fonction définie presque partout comme étant égale à la dérivée de f au sens des fonctions, sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ séparément.

Définition 1.3.1 *On appelle filtre sur un ensemble non vide X, Toute partie $\mathcal{F}$ de $P(x)$ vérifiant les axiomes:*

- *Si $A \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$;*
- *Si $A, B \in \mathcal{F}$, alors $A \cap B \in \mathcal{F}$;*
- *$\emptyset \notin \mathcal{F}$.*

Si (X, τ) est un espace topologique, alors pour tout $x \in X$, $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur X, c'est le filtre des voisinages de x pour la topologie τ sur X.

Enfin le support de la distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert où elle est nulle. Précisément

$$x \in suppT \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x), \exists \varphi \in \mathcal{D}(V_a), \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Exemple 1.3.4 *supp* $\delta_a = \{0\}$. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *supp* $T_f =$ *supp* f.

On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide (espace de Schwartz) c'est-à-dire des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que pour tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}^N$ (multi-indices),

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N),\ \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N)$. On dira qu'une suite de fonctions $(u_n)_n$ converge vers u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta u_n(x) - x^\alpha D^\beta u(x)| = 0,\ \forall \beta \in \mathbb{N}^N,\ \alpha \in \mathbb{N}^N.$$

Exemple 1.3.5 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),\ e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*
$\frac{1}{1+x^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car $|x^3 \frac{1}{1+x^2}| \nrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

Proposition 1.3.1 *([3])*

1. *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ s'injecte continument dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.*
2. *L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est complet.*
3. *L'injection de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est continue.*
4. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

Le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, l'espace des distributions tempérées. Une distribution tempérée est une distribution sur $\mathbb{R}^N$ continue pour la topologie induite sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ pour celle de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ si seulement si $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ vérifiant

$$\exists C > 0,\ \exists m \in \mathbb{N} \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^N, |\alpha|\leq m} (1 + \|x\|^m)|D^\alpha \varphi(x)|.$$

Exemple 1.3.6 *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N),\ 1 < p \leq +\infty$, alors $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $|\langle T_f, \varphi\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} |f(x)|dx$.*
δ et toutes ses dérivées sont tempérées, $|\varphi^{(m)}(0)| \leq \|\varphi^{(m)}\|_\infty$.
Toute distribution à support compact est tempérée.

On a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
Et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ est l'espace des distributions à support compact. Et $\forall p \in [1, +\infty],\ L^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

1.4 La transformée de Fourier

La définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a été donnée au début de ce chapitre.

Définition 1.4.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, on définit sa transformée de Fourier par:*

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix.\xi} dx\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \qquad (TF)$$

La transformée de Fourier vérifie les propriétés suivantes:

1. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ on a $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.*

2. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ est un homéomorphisme. Son inverse, noté $\overline{\mathcal{F}}$ est défini par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{ix.\xi} d\xi \ \forall x \in \mathbb{R}^N. \qquad (TFI)$$

3. *pou tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ on a les formules suivantes:*

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) \qquad (R_1)$$

$$\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha D^\alpha \widehat{f}(\xi) \qquad (R_2)$$

4. *Parseval dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, alors $\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\widehat{g}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi$.*

Définition 1.4.2 *On définit la transformée de Fourier de toute distribution tempérée $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ par la formule:*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

De même pour la transformée de Fourier inverse:

$$\langle \overline{\mathcal{F}}(T), \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)} = \langle T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

et l'on a encore $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(T)) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(T)) = T$ pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ jouit des propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est un homéomorphisme.

2. Les relations (R_1) et (R_2) sont vérifiées au sens des distributions pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

3. Si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ alors les expressions de $\mathcal{F}(f)$ et $\overline{\mathcal{F}}(f)$ sont données explicitement par les formules (TF) et (TFI).

Exercice 1.4.1 *Montrer que si $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ alors $\widehat{u}$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^N$.*

Théorème 1.4.1 *(De Plancherel)*
Si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ alors $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. De plus l'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ est une isométrie (pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^N)$). L'identité

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

s'appelle l'identité de Parseval.

Le diagramme suivant résume une partie des résultats énoncés ci-dessus:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) & \stackrel{\mathcal{F}}{\to} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \\ \cap & & \cap \\ L^2(\mathbb{R}^N) & \stackrel{\mathcal{F}}{\to} & L^2(\mathbb{R}^N) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) & \stackrel{\mathcal{F}}{\to} & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \end{array}$$

où $\stackrel{\mathcal{F}}{\to}$ désigne un homéomorphisme et où les inclusions sont toutes continues et denses.

Exemple 1.4.1 $\langle\widehat{\delta_a},\varphi\rangle = \widehat{\varphi} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-ixa}\varphi(x)dx \Rightarrow \widehat{\delta_a} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}e^{-ixa}$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, *et* $\widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}1_{\mathbb{R}^N}$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$,
$\langle\widehat{\delta'_a},\varphi\rangle = -\widehat{\varphi}'(a) = i\widehat{x\varphi}(a) = i\langle\delta_a,\widehat{x\varphi}\rangle = i\langle x\widehat{\delta_a},\varphi\rangle$ *d'où* $\widehat{\delta'_a} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}xe^{-ixa}$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. *Et* $\widehat{\delta_a(k)} = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}x^k e^{-ixa}$, $\widehat{\delta(k)} = \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}}x^k$.

Proposition 1.4.1 *La transformée de Fourier d'une distribution* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ *à support compact est une fonction* C^∞ *au* $\mathbb{R}^N$ *associeè à la fonction*

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}\langle T, e^{-ix\xi}\rangle(\xi).$$

Proposition 1.4.2 *Si* $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$, *alors* $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *et on a* $\mathcal{F}(S * T) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\mathcal{F}(S)\mathcal{F}(T)$ *de même* $\mathcal{F}^{-1}(S * T) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\mathcal{F}^{-1}(S)\mathcal{F}^{-1}(T)$.

Chapitre 2

Quelques espaces fonctionnels

Les espaces fonctionnels sont des espaces mathématiques qui regroupent des fonctions ayant des propriétés spécifiques. Les espaces fonctionnels les plus couramment utilisés incluent les espaces de Hilbert, les espaces de Banach, les espaces de Sobolev, les espaces de Lebesgue, etc. Ces espaces fonctionnels sont essentiels pour la formulation et la résolution de nombreux problèmes mathématiques et physiques.

2.1 Espaces de Sobolev

L'analyse démontre l'intérêt qui s'attache à l'introduction de l'espace des fonctions de L^2 dont les dérivées au sens des distributions sont dans L^2, ce sont les espaces de Sobolev H^m que l'on peut munir d'une structure hilbertienne.
Ces espaces et tous ceux construits par des procédés semblables, jouent un rôle absolument fondamentale dans l'analyse des EDP.

Définition 2.1.1 *Si Ω désigner un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et m un entier naturel, on appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$ l'espace vectoriel suivant:*

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m\right\}.$$

Bien entendu, dans cette définition, la dérivée $\partial^\alpha u$ est à prendre au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Alors pour $m = 0$, on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire:

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx$$

qui induit la norme suivante:

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Théorème 2.1.1 *L'espace $H^m(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_m$ est un espace de Hilbert.*

Preuve 2.1.1 *Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la topologie de $H^m(\Omega)$. Alors $\forall\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq m$, la suite $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet, par conséquent $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in L^2(\Omega)$, de même $\forall\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| \leq m$, la suite $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ convergé vers un élément ω_α de $L^2(\Omega)$ pour topologie de $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ donc $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$*

converge vers u pour la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ comme l'opérateur D^α est continu de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, la suite $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^\alpha u$ pour la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$. La topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant séparée, on a nécessairement $\omega_\alpha = D^\alpha u,\ |\alpha| \leq m$.
Finalement pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leq m$, la suite $(D^\alpha u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^\alpha u$ pour la topologie de $L^2(\Omega)$. D'oú $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers u pour la topologie de $H^m(\Omega)$.

Remarque 2.1.1 *En théorie des EDP, on utilise aussi les espaces $W^{m,p},\ m \in \mathbb{N},\ p \geq 1$ obtenus en remplaçant $L^2(\Omega)$ par $L^p(\Omega)$ dans la définition précédente.*

Proposition 2.1.1 *Si $m \geq m'$. $H^m(\Omega)$ est contenu avec injection continue dans $H^{m'}(\Omega)$.*

Preuve 2.1.2 *Si $m \geq m',\ u \in H^m(\Omega) \Longrightarrow u \in H^{m'}(\Omega)$ et $\|u\|_{m'} \leq \|u\|_m$.*

Remarque 2.1.2

1. *On a $\forall m \in \mathbb{N}$, les inclusion suivantes:*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m-1}(\Omega) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

2. *Le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^N$ est intéressant dans la mesure où on peut le redéfinir d'une maniérer équivalente par la transformée de Fourier.*

Théorème 2.1.2 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N),\ \forall m \in \mathbb{N}$.*

Preuve 2.1.3 *Voir [4]*

2.1.1 Cas particuliers $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$:

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

a)

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ i = 1, \ldots, N \right\}.\ H^1(\Omega)$$

est un espace de Hilbert lorsque il est muni de produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}dx$$

et de la norme associée

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on peut défini $H^1(\Omega)$ en utilisant les coordonnées polaires par la paramétrisation

$$\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x, y) \in \Omega,\ r \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

$$(r, \theta) = \phi^{-1}(x, y) \in \phi^{-1}(\Omega) = \widetilde{\Omega}.$$

L'application:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega, dxdy) & \longrightarrow & L^2(\widetilde{\Omega}, rdrd\theta) \\ u & \mapsto & u \circ \phi \end{array}$$

est une isométrie car:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(x,y)|^2 dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |u(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 r dr d\theta.$$

D'autre part, on a si

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dx} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \frac{d}{dy} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}. \end{array}$$

Donc pour que $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ soient dans $L^2(\Omega)$, il faut et il suffit que $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}$, $\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}$ appartiennent à $L^2(\Omega)$.
Par conséquent,

$$H^1(\widetilde{\Omega}) = \left\{ \widetilde{u} \in L^2(\widetilde{\Omega}, dr d\theta),\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} \text{ et } \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta} \in L^2(\widetilde{\Omega}, r dr d\theta) \right\}.$$

Muni de sa norme naturelle:

$$\|\widetilde{u}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\widetilde{u}(r,\theta)|^2 r dr d\theta + \int\limits_{\widetilde{\Omega}} |\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}(r,\theta)|^2 r dr d\theta + \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \frac{1}{r}|\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}(r,\theta)|^2 dr d\theta.$$

b)

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),\ i,j = 1,...,N \right\}.\ H^1(\Omega)$$

est un espace de Hilbert lorsque il est muni de produit scalaire

$$(u,v)_{H^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\overline{\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)}dx + \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\overline{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x)}dx$$

et de la norme associe

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Remarquons ici que si $u \in H^2(\Omega)$ alors $\nabla u \in (H^1(\Omega))^N$.

2.1.2 Quelques propriétés immédiates:

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^m(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}$. Cette inclusion est stricte car si $m = 1$ et $u(x) = \frac{1}{1+x^2} \in H^m(\mathbb{R})$ mais $u \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. $H^m(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

3. $H^m(\mathbb{R}^N)$ coïncide avec l'espace des distributions tempérées telles que $(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

4. la norme de $H^m(\mathbb{R}^N)$ est équivalant à la norme définie par

$$\|u\|^2_m = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

5. Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit $H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \ (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}$.

Exemple 2.1.1 *1. Soit $u(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, définie sur $I =]1;+\infty[$. Cherchons les α pour lesquelles $u \in H^1(I)$.*
Il faut que x^α et $\alpha x^{\alpha-1}$ dans $L^2(I)$ ce qui donne:

$$\int_1^{+\infty} x^{2\alpha}dx = \left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right]_1^{+\infty} < \infty \ si \ \alpha > \frac{-1}{2},$$

et

$$\alpha^2\int_1^{+\infty} x^{2\alpha-2}dx = \left[\frac{x^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right]_1^{+\infty} < \infty \ si \ \alpha > \frac{1}{2},$$

donc $u \in H^1(I)$ si $\alpha < \frac{-1}{2}$.

2. $\Omega =]-1;1[$, $v(x) = |x|^\alpha, \alpha > 0$.

$$\int_{-1}^1 x^{2\alpha}dx = 2\left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right]_0^1 < \infty \ si \ \alpha > \frac{-1}{2},$$

$$\begin{aligned}\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle v',\varphi\rangle &= -\int_{-1}^1 |x|^\alpha\varphi'(x)dx\\ &= -\int_{-1}^0 (-x)^\alpha\varphi'(x)dx - \int_0^1 x^\alpha\varphi'(x)dx\\ &= -\alpha\int_{-1}^0 (-x)^{\alpha-1}\varphi(x)dx + \alpha\int_0^1 x^{\alpha-1}\varphi(x)dx\\ &= \langle\alpha sing(x)|x|^{\alpha-1},\varphi\rangle.\end{aligned}$$

D'où $v'(x) = \alpha sing(x)|x|^{\alpha-1}$. Aussi

$$\alpha^2\int_{-1}^1 |x|^{2\alpha-2}dx = 2\alpha^2\left[\frac{x^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right]_0^1 < \infty \ si \ \alpha > \frac{1}{2}.$$

En conséquence $|x|^\alpha \in H^1(\Omega)$ si $\alpha > \frac{1}{2}$, $|x|^\alpha \in L^\Omega \setminus H^1(\Omega)$ si $\frac{-1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

3. Tout fonction de $C^1([-1;1])$ est dans $H^1([-1;1])$.

4. Soit u définie sur $]-1;1[$ par $u(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x > 0, \\ 0 \ si \ x \leq 0, \end{cases}$ *alors $u \notin H^1(]-1;1[)$.*
En effet, $u \in L^2(]-1;1[)$ mais $u' = \delta$ ne peut pas identifiée à une fonction de $L^2(]-1;1[)$. Suppose le contraire c'est à dire qu'il existe $g \in L^2(]-1;1[)$ telle que $\varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle = \langle T_g,\varphi\rangle = \int_{-1}^1 g(x)\varphi(x)dx$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(]-1;1[)$.
Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a:

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^1 |g(x)|^2dx = 0.$$

Soient $0 < \epsilon \leq \frac{1}{4}$ tel que $\int_{-\epsilon}^\epsilon |g(x)|^2dx \leq \frac{1}{2}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(]-1;1[)$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ sur $]-1;1[$, $\varphi(0) = 1$ et $supp\varphi \subset [-\epsilon;\epsilon]$. Donc

$1 = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle = |\int_{-\epsilon}^\epsilon g(x)\varphi(x)dx| \leq \int_{-\epsilon}^\epsilon \frac{|g(x)|^2}{2}dx + \int_{-\epsilon}^\epsilon \frac{|\varphi(x)|^2}{2}dx \leq \frac{1}{4} + \epsilon \leq \frac{1}{2}$. *Absurde.*

5. $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *si seulement si* $2s < -N$
   En effet, $\widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}}$, *donc* $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *si seulement si* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Voici quelques illustrations des $H^s(\mathbb{R}^N)$:

Proposition 2.1.2 *Soit* $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. *Si* p *est l'ordre de* T, *alors* $T \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *dès que* $2(s+p) < -N$.

Preuve 2.1.4 *Puisque* T *est à support compact,* $\widehat{T} \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *De plus*

$$
\begin{aligned}
|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{T}(\xi)| &= |(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\langle T_x, e^{-ix\xi}\rangle|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \\
&\leq c(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{|\alpha|\leq p}\sup_x |D_x^\alpha(e^{-ix\xi})| \\
&\leq c(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\xi|^p \\
&\leq c'(1+|\xi|^2)^{\frac{s+p}{2}}.\textit{ou bien si } \int_{\mathbb{R}^N}\frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{-(s+p)}} < \infty \textit{c'est à dire } 2(s+p) < -N
\end{aligned}
$$

Donc $T \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *si* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s+p}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.1.3 *Pour tout* $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Preuve 2.1.5 *Puisque* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, *on montre que* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $H^s(\mathbb{R}^N)$.
Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ *alors* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. *Comme* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *il existe* $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *qui converge dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *vers la fonction* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}$ *lorsque* $j \to +\infty$.
Posons $\widehat{g}_j(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\varphi_j(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Donc* $g_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *et par construction* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{g}_j$.
φ_j *converge dans* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *vers* $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}$ *autrement dit* (g_j) *tend vers* f *dans* $H^s(\mathbb{R}^N)$.

En général, pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^m(\Omega)$, $m \geq 1$.

Exemple 2.1.2 *L'exemple suivant montre que* $\mathcal{D}(]0;1[)$ *n'est pas dense dans* $H^1(]0;1[)$.
En effet soit la fonction $f(x) = e^x \in H^1(]0;1[)$ *et* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0;1[)$, *on a*

$$
\begin{aligned}
\langle f, \varphi\rangle_{H_1(]0;1[)} &= \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx + \int_0^1 f'(x)\varphi'(x)dx \\
&= \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}'} + \langle f', \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}'} \\
&= \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}'} - \langle f'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}'} \\
&= 0 \quad \textit{car } f = f''.
\end{aligned}
$$

D'où $f \in \mathcal{D}(]0;1[)^{\perp_{H^1(]0;1[)}} \neq \{0\}$, *c'est à dire* $\mathcal{D}(]0;1[)$ *ne peut pas être dense dans* $H^1(]0;1[)$.

On a le résultat de densité suivant pour un ouvert assez régulier.

Proposition 2.1.4 *([4]) Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *de bord de classe* C^1 *ou si* $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_N) \ / \ x_N > 0\}$, *alors pour tout* $u \in H^1(\Omega)$, *il existe une suite des fonctions* $(u_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ *telle que*

$$\|u_j - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \textit{ lorsque } j \to +\infty.$$

Ceci justifie la définition suivante:

Définition 2.1.2 *On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|.\|_{H^m(\Omega)}$) du sous-espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 2.1.3 *1. $H_0^m(\mathbb{R}^N) = H^m(\mathbb{R}^N)$.*

2. $H_0^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire de $H^m(\Omega)$.

3. $\forall m \geq 1$, $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert, par définition $H_0^m(\Omega)$ est fermé dans $H^m(\Omega)$ et donc complet.

Théorème 2.1.3 *Le complement orthogonale de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est l'ensemble des $u \in H^m(\Omega)$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles:*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0.$$

Preuve 2.1.6 *Soit $u \in H^m(\Omega)$, alors si $u \in (H_0^m(\Omega))^\perp = (\overline{\mathcal{D}(\Omega)})^\perp = \overline{(\mathcal{D}(\Omega))^\perp} = (\mathcal{D}(\Omega))^\perp$. D'où, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a:*

$$\begin{aligned} 0 = \langle u, \varphi \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} &\Leftrightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} \langle (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = 0 \end{aligned}$$

Exemple 2.1.3 $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus (H_0^1(\Omega))^\perp$.
Ainsi $h \in (H_0^1(\Omega))^\perp$ si seulement si $\langle h, v \rangle_{H^1(\Omega)} = 0$, $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou bien, $\int_\Omega h(x)\overline{v(x)}dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}(x) dx = 0$.
Que nous écrivons au sens des distributions

$$\begin{aligned} \langle h, \overline{v} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} + \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial h}{\partial x_i}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 &\Leftrightarrow \langle h, \overline{v} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} - \sum_{i=1}^N \langle \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}, \overline{v} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle h - \Delta h, \overline{v} \rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

D'où $-\Delta h + h = 0$.

En conséquence, $u \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \exists u_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $h \in (H_0^1(\Omega))^\perp$ tels que

$$\begin{cases} u = u_0 + h, \\ -\Delta u + u = -\Delta u_0 + u_0. \end{cases}$$

Exercice 2.1.1 *Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha \leq m$, l'opérateur de dérivation D^α est linéaire continu de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-|\alpha|}(\Omega)$.*

2.2 Notion de trace

On sait que les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont pas nécessairement continues. Pour définir leur valeur au bord, on va les approcher par des fonctions régulieres telles que celle de $\mathcal{D}(\Omega)$ par densité dans $H^1(\Omega)$ etc.
On montre ici que le fait d'associer une valeur au bord pour une fonction est une opération continue par la topologie de $H^1(\Omega)$.
Plus précisément, on a:

Théorème 2.2.1 ***Théorème de trace***
Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^n$. On défini l'application trace

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) & \to & L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\overline{\Omega}) \\ v & \to & \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} \end{array}$$

$C(\overline{\Omega})$ espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.
Alors γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ notée encore γ_0. En particulier, il existe $c > 0$, $\forall v \in H^1(\Omega)$, on a:

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus,

$$H_0^1 = Ker\ \gamma_0 = \{u \in H^1(\Omega)\ /\ \gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}\}.$$

Preuve 2.2.1 *On montre le résultat pour le demi-espace $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N,\ x_N > 0\}$. Soit $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$, on a*

$$|v(x',0)|^2 \leq -2\int_0^{+\infty} v(x';x_N)\frac{\partial v}{\partial x_N}(x';x_N)dx_N$$

et en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|v(x',0)|^2 \leq \int_0^{+\infty} \left(|v(x';x_N)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x';x_N)|^2\right) dx_N.$$

Par intégration en x', on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x',0)|^2 dx' \leq \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \left(|v(x)|^2 + |\frac{\partial v}{\partial x_N}(x)|^2\right) dx,$$

c'est à dire

$$\|v\|_{L^2(\partial\mathbb{R}_+^N)} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

Par densité de $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$, on a le résultat .
D'autre part, comme les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les limites des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $H^1(\Omega)$ et que celles-ci s'annulent sur $\partial\Omega$, la continuité de γ_0 implique que la fonction limite a une trace nulle. D'où, $H_0^1(\Omega) \subset \{u \in H^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0\}$.
Montrons la réciproque, c'est à dire

$$si\ u \in H^1(\Omega = \mathbb{R}_+^N),\ \gamma_0 u = 0\ \ alors\ \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Par densité de $H^1(\Omega)$ à support compact dans Ω, on peut supposer que $u \in H_0^1(\Omega)$, $\gamma_0 u = 0$, $supp\ u$ compact.

Vérifions que u est limite dans $H^1(\Omega)$ d'une suite des fonctions $u_j \in H_0^1(\Omega)$ ce qui impliquer a $u \in H_0^1(\Omega)$ car $H_0^1(\Omega)$ est fermé par sa définition dans $H^1(\Omega)$.
Pour cela on introduit la fonction θ_j défini par:

$$\theta_j(x_N) = \begin{cases} 1 & si \;\; x_N \geq \frac{2}{j}, \\ jx_N - 1 & si \;\; x_N \in [\frac{1}{j}; \frac{2}{j}], \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

On pose $u_j(x) = u_j(x', x_N) = \theta_j(x_N)u(x)$. Alors par régularisation, on peut approcher pour j fixé, $u_j$par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Soit $\varphi_l = u_j * \rho_l$ où $\rho_l(x) = l^N \rho(lx)$ où ρ est un élément d'une suite régularisant dans $\mathbb{R}^N$.
Or, d'après les propriétés de la convolution si $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $v * \rho_l \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, et si $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $\frac{\partial (v*\rho_l)}{\partial x_i} = \rho_l * \frac{\partial v}{\partial x_i} \to \frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Dans montre cas, $u_j \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, ..., N$, car

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_j|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{\frac{1}{j}}^{+\infty} |\theta_j(x)|^2 |u(x)|^2 dx_N \right) dx' \leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Car $|\theta_j(x_N)| \leq 1$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $1 \leq i \leq N-1$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \theta_j u}{\partial x_i} = \theta_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
Pour $i = N$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_N} = u\frac{\partial \theta_j}{\partial x_N} + \theta_j \frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ car supp $\frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} \subset [\frac{1}{j}; \frac{2}{j}]$.
Par conséquence, $u_j \in H_0^1(\Omega)$ et $\gamma_0 u_j = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$.
Il reste à montrer que $u_j \to u$ dans $H^1(\Omega)$.
Or,

$$\begin{aligned} \|u_j - u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_0^{\frac{2}{j}} |(\theta_i - 1)u|^2 dx_N dx' \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{2}{j}} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x', x_N)|^2 dx' dx_N \to 0. \end{aligned}$$

De même,
Pour $1 \leq i \leq N-1$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \theta_j u}{\partial x_i} = \theta_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$.
Pour $i = N$, $\frac{\partial u_j}{\partial x_N} = u\theta_j' + \theta_j \frac{\partial u}{\partial x_N}$
$, \in L^2(\mathbb{R}^N)$ car $\theta_j \frac{\partial u}{\partial x_N} \to \frac{\partial u}{\partial x_N}$ dans $L^2(\Omega)$ et nous allons montrer que $\theta' u \to 0$ dans $L^2(\Omega)$.
En effet,

$$\|\theta_j' u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\frac{1}{j}}^{\frac{2}{j}} j^2 |u'(x', x_N)|^2 dx_N.$$

Mais pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x_N \to u(x', x_N)$ est dans $H^1(]0; +\infty[)$, donc est pour tout x' représentée par une fonction continue par rapport à x_N et $u(x', 0) = 0$ (voir Lemme suivant). On peut alors écrire:

$$|u(x', x_N)|^2 \leq |\int_0^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', y) dy|^2 \leq x_N \int_0^{x_N} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', y)|^2 dy$$

pour l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
D'où, $|u(x', x_N)|^2 \leq x_N \int_0^{\frac{2}{j}} |u(x', y)|^2 dy$ pour $x_N \leq \frac{2}{j}$.

Ainsi

$$\|\theta'_j u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' j^2 \int_{\frac{2}{j}}^{\frac{2}{j}} x_N \int_0^{\frac{2}{j}} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',y)|^2 dy$$
$$\leq \frac{3}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{\frac{2}{j}} |\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',y)|^2 dy \to 0.$$

Lemme 2.2.1 *Soit $v \in H^1(\mathbb{R}_+ =]0;+\infty[)$. Alors v est une fonction continue sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on a*

$$|v(0)|^2 \leq 2\|v\|_{L^{\mathbb{R}_+}} \|v'\|_{\mathbb{R}_+}.$$

Preuve 2.2.2 *Puisque $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+)$, il suffit d'établir l'inégalité pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*

$$\frac{d}{dt}|v(t)|^2 = \frac{d}{dt}(v(t)\overline{v(t)}) = \frac{dv}{dt}\overline{v(t)} + v(t)\frac{d\overline{v(t)}}{dt}$$
$$= 2Re\ (v(t)\frac{d\overline{v(t)}}{dt}).$$

D'où, en intégrant de 0 à $+\infty$, on a:

$$|v(0)|^2 = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}|v(t)|^2 dt = 2Re \int_0^{+\infty} v(t)\overline{v(t)}' dt$$
$$\leq 2\int_0^{+\infty} |v(t)||\overline{v(t)}'| dt$$
$$\leq \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \|v'\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Pour la continuité, on montre d'une manière générale que si $N = 1$, alors $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, c'est à dire si $v \in H^1(\Omega)$, on montre qu'il existe $u \in C(\overline{\Omega})$ tel que $v = u$ presque partout dans Ω.
On fixé un point quelque x_0 dans Ω et on défini u par:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} v'(t)dt \ \ \textit{pour tout} \ \ x \in \Omega.$$

Notons que $u(x)$ a bien un sens pour tout $x \in \Omega$ puisque

$$|u(x)| \leq \sqrt{|x - x_0|}\|v'\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Calculons la dérivée de u au sens des distributions:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D},\ \langle u', \varphi \rangle = -\int_a^b u(x)\varphi(x)' dx = -\int_a^b \int_{x_0}^x v'(t)\varphi'(x)dtdx$$

si supp $(\varphi') \subset [a;b]$, alors le théorème de Fubini, donne

$$\langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = -\int_a^{x_0}\int_{x_0}^{x} v'(t)\varphi'(x)dtdx - \int_{x_0}^{b}\int_{x_0}^{x} v'(t)\varphi'(x)dtdx$$
$$= \int_a^{x_0}\int_{x}^{x_0} v'(t)\varphi'(x)dtdx - \int_{x_0}^{b}\int_{x_0}^{x} v'(t)\varphi'(x)dtdx$$
$$= \int_a^{x_0}\int_{a}^{t} v'(t)\varphi'(x)dxdt - \int_{x_0}^{b}\int_{t}^{b} v'(t)\varphi'(x)dxdt$$

car dans la 1^{er} *intégrale* $\begin{bmatrix} a \leq x \leq x_0 \\ x_0 \leq t \leq x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \leq x \leq t \\ a \leq t \leq x_0 \end{bmatrix}$, *dans la* 2^{eme} *intégrale* $\begin{bmatrix} x_0 \leq x \leq b \\ x_0 \leq t \leq x \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\begin{bmatrix} t \leq x \leq b \\ x_0 \leq t \leq b \end{bmatrix}$.
D'où

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} &= \int_a^{x_0} v'(t)\left(\varphi(t) - \varphi(a)\right) dt - \int_{x_0}^b v'(t)\left(\varphi(t) - \varphi(a)\right) dt \\ &= \int_a^b v'(t)\varphi(t)dt \quad car \;\; \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $u' = v'$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *donc* $u = v + c,\ c \in \mathbb{R}$, *mais* $u, v \in L^2(\Omega)$, *alors* $u = v + c$ *presque partout dans* Ω.
Si on pose $\widetilde{u} = u - c,\ \forall x \in \Omega$, *on a* $\widetilde{u} = v$ *presque partout dans* Ω.
D'autre part, $\widetilde{u}$ *est continue dans* $\overline{\Omega}$ *car* $\forall x, y \in \overline{\Omega}$, *on a*

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y)| &= |\int_{x_0}^x v'(t)dt - c + \int_{x_0}^y v'(t)dt + c| \\ &= |\int_x^y v'(t)dt| \\ &\leq \sqrt{|x-y|}\|v'\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Attention: Si $N > 1$, le Lemme est faux. En général, les fonctions de $H^1(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^N,\ N > 1)$ ne sont pas continues.

Remarque 2.2.1 *Pour* $m \geq 1$, *on a aussi*

$$H_0^m = \{u \in H^m(\Omega),\ \frac{\partial^i u}{\partial x^i}|_{\partial\Omega} = 0,\ i = 0, 1, ..., m-1\}.$$

Exemple 2.2.1 *Soit* $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, *cherchons* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *solution de l'équation* $-\Delta u + k^2 u = f,\ k \in \mathbb{R}^*$.
Par la transformée de Fourier, on a $\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + k^2}\widehat{f}(\xi)$.
Or,

$$(1 + |\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}|\widehat{u}(\xi)| = \frac{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}}{|xi|^2 + k^2}|\widehat{f}(\xi)| \leq c(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Donc, $u = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u} \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$. *Cette solution est unique car si* $u, v \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$ *sont solution alors* $-\Delta\omega = k^2\omega$ *où* $\omega = u - v \in H^{s+2}(\mathbb{R}^N)$. *D'où* $(|\xi|^2 + k^2)\widehat{\omega} = 0$ *donc* $\widehat{\omega} = 0$.

Nous savons que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$ pour la topologie de $H^m(\Omega)$. Par conséquence, le duale de $H_0^m(\Omega)$, c'est à dire l'espace des formes linéaire continues sur $H_0^m(\Omega)$, est un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On peut introduire la définition suivante:

Définition 2.2.1 *Pour* $m \in \mathbb{N}$, *on note* $H^{-m}(\Omega)$ *le dual topologie de* $H_0^m(\Omega)$.

Proposition 2.2.1

1. $H^{-m}(\Omega)$ *est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme naturelle*

$$\|F\|_{-m} = \sup_{\|u\|_m} \frac{|Fu|}{\|u\|_m}.$$

2. *Si* $m \geq m'$, $H^{-m'}(\Omega) \hookrightarrow H^m(\Omega)$ *avec injection continue.*

Preuve 2.2.3 *1. Résulte du concept général du dual d'un E.V.N.*

2. Si $m \geq m'$, $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^m(\Omega) \subset H_0^{m'}(\Omega)$ pars que, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, alors $H_0^m(\Omega)$ est dense dans $H_0^{m'}(\Omega)$ car

$$H_0^{m'}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}}^{H^{m'}(\Omega)} \subset \overline{H_0^m(\Omega)}^{H^{m'}(\Omega)} \subset \overline{H_0^{m'}(\Omega)} = H_0^{m'}(\Omega).$$

Donc $H^{-m'}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ et $i : H^{-m'}(\Omega) \to H^m(\Omega)$ est continue car $\|.\|_{-m}|_{H^{-m'}(\Omega)} = \|.\|_{-m'}$.

2.3 Théorème d'isomorphisme

Théorème 2.3.1 ***Théorème d'isomorphisme***
L'application

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} : \ H^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega)$$

est un isomorphisme isométrique.

Preuve 2.3.1 *Soit $g \in H^m(\Omega)$ et posons $T = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} g$. Montrons que T est identifiable à un élément de $H^{-m}(\Omega)$. En effet, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a:*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha g, D^\alpha \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle g, \widehat{\varphi} \rangle_{H^m(\Omega)} = \langle \widehat{g}, \varphi \rangle.$$

Par conséquence, T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ muni de la topologie de $H^m(\Omega)$, donc T peut être prolongée en une forme linéaire continue L sur $H_0^m(\Omega)$, de plus on a:

$$L(u) = \langle \widehat{g}, u \rangle_{H^m(\Omega)}, \ \ u \in H_0^m(\Omega).$$

Ce qui prouve que $L \in H^{-m}(\Omega)$ et $\|L\|_{H^{-m}(\Omega)} = \|g\|_{H^m(\Omega)}$ si $g \in H_0^m(\Omega)$.
Il reste à démontrer que l'image de $H_0^m(\Omega)$ par l'application $\sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$ est égale à $H^{-m}(\Omega)$.
En effet, d'après le théorème de Riesz si L est une forme linéaire continue sur $H_0^m(\Omega)$, il existe $g \in H_0^m(\Omega)$ tel que $\forall u \in H_0^m(\Omega)$, on ait $L(u) = \langle u, g \rangle_{H^m(\Omega)}$.
Soit T la distribution associée à L c'est à dire $T = L|_{\mathcal{D}(\Omega)}$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a:

$$\begin{aligned} L(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \langle \varphi, g \rangle_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha \varphi, D^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} \overline{g}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $T = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} \overline{g}$.

Corollaire 2.3.1 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est partout dense dans $H^{-m}(\Omega)$.*

L'isométrie $\sum\limits_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$ de $H_0^m(\Omega)$ dans $H^{-m}(\Omega)$ applique $\mathcal{D}(\Omega)$ dans lui même, or l'image d'une parte dense par une isométrie surjective est aussi dense, ce qui donne le résultat.

2.4 Théorème de représentation

Théorème 2.4.1 ***Théorème de représentation***
Une distribution T sur Ω est prolongeable en un élément de $H^{-m}(\Omega)$ si et seulement si $T = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha$ où $f_\alpha \in L^2(\Omega)$.

Preuve 2.4.1

1. *Soit $T = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha,\ f_\alpha \in L^2(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle f_\alpha, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha, D^\alpha \overline{\varphi}\rangle_{L^2(\Omega)}$$

   d'où, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}\right) \|\varphi\|_{H^m(\Omega)}$.
   Ce qui montre que T est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $H^m(\Omega)$, donc $T \in H^{-m}(\Omega)$.

2. *Inversement, soit $T \in H^{-m}(\Omega)$, d'après le théorème d'isomorphisme précédent, $\exists g \in H_0^m(\Omega)$ tel que $T = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} g$. Posons $f = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g$ on a bien $T = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} f_\alpha$.*

Exemple 2.4.1

1. $u \in H^{-1}(\Omega) \Leftrightarrow u = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ *où* $f_0, f_1, ..., f_N \in L^2(\Omega)$.

2. *Soit $u \in L^2(\Omega)$. pour $1 \leq i \leq N$, on peut défini une forme linéaire continue $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ par la formule*

$$\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

   En effet, $L(\varphi) = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ car

$$\begin{aligned} |L(\varphi)| = |\langle \overline{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}| &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

3. *On a $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \subset H^{-1}(\Omega)$ et les inclusion sont strictes.*

2.5 Quelque inégalités dans les espaces de Sobolev.

Lemme 2.5.1 ***Inégalité de Poincaré***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans une direction (i.e, $\exists R > 0$ tel que par exemple $\Omega \subset \{|x_N| < R\}$). Il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq c \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Preuve 2.5.1 *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\varphi(x', x_N) = \int_{-R}^{R} 1_{-R;x_N}(t)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', t)dt$.*
En utilisant Cauchy-Schwartz, on a alors

$$|\varphi(x', x_N)|^2 \leq 2R \int_{-R}^{R} |\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', t)|^2 dt.$$

Intégrons cette inégalité sur Ω, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} |\varphi(x', x_N)|^2 dx &\leq 2R \int_{-R}^{R} \int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_{-R}^{R} |\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x', t) dt \right] dx_N dx' \\
&\leq 4R^2 \int\limits_{\Omega} |\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}(x)|^2 dx \\
&\leq 4R^2 \int\limits_{\Omega} |\nabla \varphi(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat dans $H_0^1(\Omega)$ par densité.

Corollaire 2.5.1 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans une direction, alors:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad c_m > 0.$$

La preuve est immédiate en itérant l'inégalité de Poincaré et en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Exercice 2.5.1 *Montrer l'inégalité de Poincaré si $\Omega =]0;1[$. Soit $u \in H_0^1(]0;1[) \subset H^1(]0;1[)$, alors pour tout $x \in]0;1[$, on a*
$u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(t)dt$ et donné

$$\|u\|^2_{L^2(]0;1[)} = \int_0^1 |u(y)|^2 dy = \int_0^1 \left(\int_0^x |u'(y)| dy \right)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |u'(y)| dy \right)^2 dx = \left(\int_0^1 |u'(y)| dy \right)^2.$$

On finalement

$$\|u\|_{L^2(]0;1[)} \leq \left(\int_0^1 |u'(x)|^2 dy \right) \left(\int_0^1 1 dy \right) = \|u'\|^2_{L^2(]0;1[)}.$$

Exercice 2.5.2 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans une direction alors $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$.*
En effet,

$$\begin{aligned}
\forall u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \\
&= \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&\leq \sqrt{1 + c^2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \sqrt{1 + c^2} \|u\|_{H_0^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

2.6 Quelques résultats de régularité:

Théorème 2.6.1 ***Théorème d'injection de Sobolev***
Pour $s > \frac{N}{2}$, alors les éléments de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sont des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Preuve 2.6.1 *On peut écrire $\widehat{u}(\xi) = \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{u}(\xi)\right](1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}$ le premier terme appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et le second appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ des que $s > \frac{N}{2}$. On a donc $\widehat{u} \in L^{\mathbb{R}^N}$ et alors u continue et tend vers 0 à l'infini (ici on a utilisé si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f}$ est continue tend vers 0 à l'infini et $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1\mathbb{R}^N}$).*

En appliquant ce théorème aux dérivées d'ordre $\leq m$ de u, on obtient:

Corollaire 2.6.1 *$\forall m \in \mathbb{N}$ et $s > \frac{N}{2} + m$, les élément de $H^s(\mathbb{R}^N)$ sont des fonctions de classe C^m. En particulier une fonction appartenant à $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout s est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

En considérant un élément de $H^s(\Omega)$ comme restriction à Ω d'un élément de $H^s(\mathbb{R}^N)$, on obtient:

Corollaire 2.6.2 *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $k,\ m \in \mathbb{N}$ tels que $m > \frac{N}{2} + k$, alors $H^m(\Omega)$ s'injecte continument dans l'espace $C^k(\Omega)$.*

On achevé ce chapitre par le théorème de Rellich d'injection compacte sur certains espace de Sobolev.

Théorème 2.6.2 ***Théorème de Rellich***
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$:

1. *L'injection de $H_0^m(\Omega)$ dans $H_0^{m-1}(\Omega)$ est compacte.*
2. *L'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compacte.*

Ω borné et $\partial\Omega$ est de classe C^m.

Le résultat de ce théorème ne subsiste pas si Ω n'est pas bornée, l'injection n'est que continue. En particulier, l'injection d'une manier compacte dans $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ lorsque Ω est borné de bord $\partial\Omega$ de classe C^2. L'injection naturelle de $H^1(]a,b[)$ est compacte dans $L^2(]a,b[)$ pour tout intervalle $]a;b[$ borné.

Chapitre 3

Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre

Les problèmes aux limites linéaires du second ordre sont des équations différentielles du second ordre qui sont soumises à des conditions aux limites spécifiques. Ces problèmes sont souvent rencontrés en physique et en mathématiques appliquées.
Un exemple classique de problème aux limites linéaire du second ordre est l'équation de Laplace, qui est une équation aux dérivées partielles qui décrit le comportement de champs scalaires dans un domaine donné. Les conditions aux limites peuvent être des valeurs spécifiques du champ à certains points du domaine, des conditions de Dirichlet (valeurs fixes du champ sur le bord du domaine) ou des conditions de Neumann (valeurs fixes des dérivées normales du champ sur le bord du domaine).
La résolution des problèmes aux limites linéaires du second ordre implique souvent l'utilisation de techniques mathématiques avancées telles que la méthode des séries de Fourier, la transformée de Laplace ou les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis. Ces problèmes permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques tels que la diffusion de la chaleur, la propagation des ondes ou la résistance des matériaux.

3.1 Classification de certains équations aux dérivées partielles

La classification générale des équations aux dérivées partielles ayant un aspect très difficile, on se restreint ici à une classification de certains équations linéaires ou quasi-linéaires de deuxième degré. Précisément on considéré des équations de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial_j} + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}) = 0 \text{ où } x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

et la matrice des coefficients de la partie principale $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial_j}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{N}$ est constante ne dépendent pas de x.
Nous allons aussi supposer que $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j = 1, ..., N$ c'est à dire A est une matrice réelle symétrique. On sait que les valeurs propres de A sont toutes réelles, on pose N_p nombre des valeurs propres strictement positives, N_n nombre des valeurs propres strictement négative.

1. On dira que 3.1 est elliptique si $N_p = N, N_n =$ ou $N_p = 0, N_n = N$, exemple:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(.) = 0.$$

2. 3.1 est générale hyperbolique si $N_p \geq 1, N_n \geq 1$ et $N_p + N_n = N$, exemple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_5^2} + f(.) = 0,\ N = 5.$$

3.1 est normale hyperbolique si $N_p = N - 1, N_n = 1$ ou $N_p = 1, N_n = N - 1$, exemple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^3} + f(.) = 0,\ N = 3.$$

3.1 est ultra-hyperbolique si $N_p \geq 2, N_n \geq 2$ et $N_p + N_n = N$, exemple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + f(.) = 0,\ N = 4.$$

3. 3.1 est générale parabolique si $N_p + N_n < N$, exemple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + f(.) = 0,\ N = 4.$$

Enfin, l'équation 3.1 est normale parabolique si $N_p = N - 1, N_n = 0$ ou $N_p = 0, N_n = N - 1$, exemple:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(.) = 0,\ N = 2.$$

Remarque 3.1.1 *1. Si l'on veut classifier une équation donnée, il faut premièrement précise le nombre N des variable indépendantes. Par exemple, l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + f(.) = 0$$

est elliptique si $N = 2$ mais est parabolique si $N > 2$.

2. Prenons $N = 2$, a, b, c des constantes réelles, non toutes nulles.

L'équation 3.1 devient (si $x_1 = x$ et $x_2 = y$)

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(.) = 0,\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0$ ou encore $\lambda^2 - \lambda(a + c) + ac - b^2 = 0$.

1. Si $ac - b^2 > 0$ et $\lambda_1,\ \lambda_2$ sont les racines, on a que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ donc $N_p = 2,\ N_n = 0$ ou $N_n = 2,\ N_p = 0$ et l'équation est elliptique.

2. Si $ac - b^2 = 0$ et $\lambda_1\lambda_2 = 0$ sont toutes deux, si $\lambda_1 > 0$, alors $\lambda_2 = 0,\ N_p = 1,\ N_n = 0$; si $\lambda_1 < 0$ alors $\lambda_2 = 0,\ N_p = 0,\ N_n = 1$; c'est le cas normal parabolique.

3. Si enfin $ac - b^2 < 0$ les deux racines sont signe contraire $N_p = 1,\ N_n = 1$, c'est le cas normal hyperbolique.

Extensions.
On considère une généralisation de 3.1 où les coefficients constants a_{ij} par des fonctions $a_{ij} = a_{ij}(x, u, u_{x_1}, ..., u_{x_N})$. Les a_{ij} dépendent de x mais non des u et $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, on peut classifier l'équation

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial_j} + f(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}) = 0,$$

séparément dans chaque point x_0, l'on étudie ses solutions, selon la paire (N_p, N_n) associée à la matrice $(a_{ij}(x_0))_{i,j=1}^{N}$, comme précédemment.
Prenons l'exemple suivant (l'équation de Tricomi): $yu_{xx} + u_{yy} = 0$. Ici $N = 2$ et en se basant sur les calculs précédents, on a $ac - b^2 = y$.

1. L'équation sera elliptique pour la semi-plan supérieur $y > 0$.

2. L'équation sera hyperbolique pour la semi-plan inférieur $y < 0$.

3. L'équation sera parabolique pour la droite $y = 0$.

Si les coefficient a_{ij} dépendent aussi de la fonction inconnue u et ses dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, on peut encore obtenir une espèce de classification, en correspondance à un point x_0 fixé et à une solution $u_0(x)$ donné. Un exemple assez instructif est fourni par l'équation:

$$\left(\gamma^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\gamma^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

où γ est constante réelle. C'est encore une équation en 2 variables, et le calcul de $ac - b^2$ nous donne $ac - b^2 = \gamma^2(\gamma^2 - u_x^2 - u_y^2)$, on a donc l'équation sera elliptique pour toutes les solutions u telles que $u_x^2 + u_y^2 < \gamma^2$, hyperbolique pour les solutions u avec $u_x^2 + u_y^2 > \gamma^2$ et parabolique que si solutions u vérifie $u_x^2 + u_y^2 = \gamma^2$.
Rappelons les forme canonique possible dans les trois cas lorsque $N = 2$:

1. $u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$, cas hyperbolique.

2. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G(x, y, u, u_x, u_y)$, cas elliptique.

3. $u_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y)$, cas parabolique.

3.2 Solutions classiques de l'équation de Laplace, de la chaleur et des ondes

Problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un demi-espace

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Le problème de Dirichlet dans l'ouvert Ω pour l'equation de Laplace consiste dans la détermination d'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathcal{P}_D)\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega, \\ u = f & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On va s'intéresser au cas particulier où Ω est un demi-espace, c.a.d. $\Omega = \mathbb{R}^N$.

Théorème 3.2.1 *([3]) On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N-1})$ (est une fonction bornée). Alors le problème $(\mathcal{P}_D)$ admet une solution unique avec $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Cette solution est donnée par la formule*

$$u(x;,x_N) = \pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\Big(\frac{N}{2}\Big)\int\limits_{\mathbb{R}^{N-1}} f(y)\frac{x_N}{(x_N^2+\|x'-y\|^2)^{\frac{N}{2}}}dy,$$

Où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} s^{x-1}e^{-s}ds$ est la fonction d'Euler et $x' = (x_1, ..., x_{N-1})$.

Remarque 3.2.1 *1. Cette formule reste valable pour des fonctions f moins régulières pour que l'intégrale généralisée converge.*

2. On sait que la solution du problème de Dirichlet 2D,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{dans } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0\}, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

est donnée par $u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(t)}{(t-x)^2+y^2}dt$, ce qui correspond exactement au résultat général si on prend $N = 2$, sachant que $\Gamma(1) = 1$.

Exemple 3.2.1 *$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, mais $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}dt = \frac{1}{2} + \arctan(\frac{x}{y}).$$

3. Le problème de Dirichlet dans un disque $D(a,R)$ de centre $a(x_0;y_0)$ et de rayon R, un point de ce disque a pour coordonnées $x_0 + r\cos\varphi$, $y_0 + r\sin\varphi$ avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$, la solution est

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}f(\theta)d\theta$$

Équation de la Chaleur

Définition 3.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathcal{S}$.*
On dit que u est continue de I dans $\mathcal{S}$ et on écrit $u \in C^0(I,\mathcal{S})$ si $\forall t \in I$ et $\forall (t_n)_n \subset I,\ t_n \to t$ alors $u(t_n) \to u(t)$ dans $\mathcal{S}$.
Pour tout $k \geq 1$, l'espace $C^k(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x))$ est l'espace des fonctions $u \in C^{k-1}(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x))$ telles que $\partial_t^{k-1}u \in C^1(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x))$.

$$C^\infty(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)).$$

On considère le problème de Cauchy suivant: Étant donnée $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, trouver $u : \mathbb{R}^N \times [0;+\infty[$ telle que

$$(\mathcal{P}_C)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N_x \times [0;+\infty[, \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Théorème 3.2.2 *([3]) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, alors il existe une unique solution $u \in C^\infty([0;+\infty[,\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N))$ satisfaisant le problème de Chaleur précédent $(\mathcal{P}_C)$ où*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} exp\left(-\frac{\|x-y\|^2}{4t}\right) f(y)dy, \ \forall t > 0.$$

Remarque 3.2.2 *Le cas $N = 1$ est connu, c'est la modèle de propagation de la chaleur dans un fil électrique assez fin.*

Équation des Ondes

Soit $c > 0$, on considéré le problème de Cauchy hyperbolique suivant: Étant donnée $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, trouver telle que

$$(\mathcal{P}_O) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0;+\infty[, \\ u(x,0) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t} = g(x) & \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Théorème 3.2.3 *([3]) Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, il existe une unique solution $u \in C^\infty([0;+\infty[,\mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ de $(\mathcal{P}_O)$ où u est donnée par $\overline{\mathcal{F}}_x u(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(c\|\xi\|t) + \widehat{g}(\xi)\frac{\sin(c\|\xi\|t)}{c\|\xi\|}$.*

Remarque 3.2.3 *Si $N = 1$, alors*

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\xi)\cos(c|\xi|)](x) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct))$$

et

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{g}(\xi)\frac{\sin(c\|\xi\|t)}{c|\xi|}](x) = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} g(x+s)ds.$$

On rentrons donc la formule connue de d'Alembert du cour du L_3 :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

3.3 Solutions faibles des EDP et Méthode variationnelle

La notion de solution faible d'une EDP est importante et été mise en existence dans beaucoup de cas importants. Il est plus facile, souvent de prouver l'existence d'une solution faible et seulement après, on établit qu'il s'agit en effet d'une solution classique.
Soient $P(D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants sur Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution faible de l'EDP

$$P(D)u = f \text{ si } \int\limits_\Omega u(x)P(-D)\varphi(x)dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

ici $P(-D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N}$.
On peut montrer que toute fonction $u \in C^m(\Omega)$ qui vérifier la relation

$$P(D) = f$$

au sens ordinaire classique, vérifier aussi l'équation $P(D) = f$ au sens faible. En effet, il suffit d'observer que, moyennant des intégrations successives par parties, en utilisant l'annulation de φ en dehors d'un compact, on a l'égalité

$$\int_{\Omega} u(x)P(-D)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} P(D)u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aussi, il est important de signaler qu'une limite (uniforme sur tout compact) de solutions faibles est encore une solution faible. Si en effet on a l'égalité

$$\int_{\Omega} u_n(x)P(-D)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f_n(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

si $u_n(x) \to u(x),\ f_n(x) \to f(x)$, uniformément sur tout compact de Ω, on trouve que

$$\int_{\Omega} u(x)P(-D)\varphi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Une dernière propriété importante se réfère aux solutions faibles qui sont assez régulière. Comme exemple simple à deux variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

on a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dxdy = 0.$$

On remarque ensuite que si $u \in C^2$ vérifiant $u_{xy} = 0$ elle vérifie aussi l'équation de la solution faible

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\varphi(x,y)dxdy = 0,\ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Il est intéressant de trouver des exemples de solutions faibles non régulières. Soient F et G deux fonctions continues non différentiables d'une seule variable.
La fonction $u(x,y) = F(x) + G(y)$ est une solution faible de l'équation $u_{xy} = 0$ car $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} u(x,y)\varphi_{xy}(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} F(x)\varphi_{xy}(x,y)dxdy + \int_{\mathbb{R}^2} G(y)\varphi_{xy}(x,y)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(x)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{xy}(x,y)dy\right)dx + \int_{\mathbb{R}} G(y)\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{xy}(x,y)dx\right)dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Formulation faible de problème elliptiques

Quand, on cherche la solution d'une EDP, on peut être confronté aux problèmes suivants:
- La solution ou les coefficients de l'EDP ne sont pas assez réguliers pour donner an sens classique à l'équation.
- La solution peut être régulière mais l'espace correspondant de régularité n'a pas de bonne

propriétés pour avoir directement l'existence de la solution dans cet espace.
On donne alors un sens faible à la solution sans perdre si possible les notions les plus naturelles, c'est à dire on cherche une solution dans un espace de régularité plus faible que souhaitée, on doit alors choisir l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution; ce choix n'est pas toujours unique et parfois non trivial.
Si on affaiblit trop la solution, il sera à priori facile d'établir l'existence mais pas l'unicité.
Si on n'affaiblit pas suffisamment l'équation, l'existence sera difficile à établir mais l'unicité sera plus simple.
Il s'agit donc de trouver un juste équilibre. L'un des outils qui rend cette approche utilisable est le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3.3.1 *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire continue sur H :*

$$\exists c_a > 0,\ \forall x, y \in H,\ |a(x,y)| \leq c_a \|x\|_H \|y\|_H.$$

a est coercive sur H, il existe $\alpha_a > 0$ telle que

$$\forall x \in H,\ a(x,x) \geq \alpha_a \|x\|_H^2$$

et soit L une forme linéaire continue sur H :

$$\forall x \in H,\ |L(x)| \leq \|L\| \|x\|_H.$$

Alors il existe un unique u dans H qui vérifié:

$$\forall v \in H,\ a(u,v) = L(v),$$

où $\|u\| \leq \frac{\|L\|}{\alpha_a}$.
Si plus a est symétrique, $a(x,y) = a(y,x)$, $\forall x, y \in H$, alors u est l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle (dite d'énergie)

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u,v) - L(v).$$

3.4 Exemples du cadre elliptique

A- Soit $a(u,v) = \int_\Omega u(-\Delta v)dx$. Pour que celle-ci ait un sens il faut pouvoir défini Δv, ce qui incite à choisir $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Ceci fournira bien une forme bilinéaire continue, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \|u\|_H \|v\|_H.$$

Par contre nous n'avons pas de coercivité.
En effet, si $u \in H$, on a

$$a(u,u) = \int_\Omega u(-\Delta u)dx = \int_\Omega u\ div(-\nabla v)dx = \int_{\partial\Omega} u(-\nabla u)\overrightarrow{n}\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Il est clair qu'il ne peut existe $\alpha > 0$ tel que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|u\|_H^2$$

ce qui impliquerait que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ serait égale à $H_0^1(\Omega)$.

B- Prenons maintenant $a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$ et $H = H^1(\Omega)$. Donc ce cas la continuité est assurée mais pas la coercivité car

$$a(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = \text{constante}.$$

Le problème n'est donc pas coercif.

C- **Problème de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet homogènes:**
Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Prenons $H = H_0^1(\Omega)$ et $a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \overline{v} dx,\ L(v) = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{v}(x)dx$,
a est évidemment bilinéaire continue et est coercive d'après l'inégalité de Poincaré:

$$\exists c > 0,\ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

d'où, $a(u,v) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{c}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$.
L est bien une forme linéaire continue sur H, par conséquent, d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnelle

$$a(u,v) = L(v),\ \forall v \in H$$

admet une solution unique $u \in H$.
Intérprétous maintenant le problème résolu
Soit $v = \overline{\varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est quelconque, on a

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega),\mathcal{D}'(\Omega)},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où, $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ comme $u \in H$, on a, $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} = 0$ (on exige ici un bord C^2 régulier), donc le problème résolu est le problème de Dirichlet homogène pour le Laplacien par la technique des solutions faibles.

Remarque 3.4.1 *Le problème résolu reste valable sans changement lorsque $f \in H^{-1}(\Omega)$ au lieu de $L^2(\Omega)$.*

D- **Problème de Dirichlet pour l'équation de Sturm-Liouville**
Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$. On donne deux fonctions continues $f, q : [a;b] \to \mathbb{R}$, on suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $q(x) \geq \delta$, pour tout $x \in [a;b]$. On s'intéresse au problème, dit de Sturm-Liouville, suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x) & \text{dans }]a;b[, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Posons $H = H_0^1(]a;b[)$ et $\forall v \in H$

$$a(u,v) = \int_a^b (u'(x)\overline{v'}(x) + q(x)u(x)\overline{v}(x))dx$$
$$L(v) = \int_a^b f(x)\overline{v}(x)dx$$

où $u',\ v'$ désignent les dérivés au sens des distributions des fonctions $u,\ v \in H$.
a est bilinéaire continue et L est linéaire et continue car

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_a^b |u'(x)\overline{v'}(x)dx| + \int_a^b |q(x)u(x)\overline{v}(x)|dx \\
&\leq \int_a^b |u'(x)\overline{v'}(x)dx| + \max|q(x)| \int_a^b |u(x)\overline{v}(x)|dx \\
&= |\langle u',v'\rangle_{L^2(]a;b[)}| + \max|q(x)||\langle u,v\rangle_{L^2(]a;b[)}| \\
&\leq (1+\max|q(x)|)\|u\|_H\|v\|_H,
\end{aligned}$$

et

$$|L(v)| = |\langle f,v\rangle_{L^2(]a;b[)}| \leq \|f\|_{L^2(]a;b[)}\|v\|_H.$$

a est coercive car

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_a^b |u(x)|^2dx + \int_a^b |q(x)||u(x)|^2dx \\
&\geq \int_a^b |u(x)|^2dx + \delta\int_a^b |u(x)|^2dx \\
&\geq \min(1,\delta)\|u\|_H^2.
\end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, on peut donc en déduire qu'il existe une unique solution $u \in H$ telle que $a(u,v) = L(v),\ \forall v \in H$.
Si on prend $v = \overline{\varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{D}(]a;b[)$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle u',\varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle qu,\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'} \\
\langle -u'',\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle qu,\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'}
\end{aligned}$$

D'où, $\langle -u''+qu,\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D},\mathcal{D}'},\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(]a;b[)$.
Alors $-u''+qu = f$ au sens faible.

E- **Problème de Neumann pour l'équation de Poisson**
On a d'abord l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, si Ω est un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall u \in H^1(\Omega)$, on ait:

$$\int_\Omega |u - \frac{1}{vol(\Omega)}\int_\Omega udx|^2dx \leq c\int_\Omega |\nabla u|^2dx.$$

Considérons la problème de Neumann:

$$(\mathcal{P}_N)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial\Omega}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$.
On pose $H = H^1(\Omega)$ et

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u\nabla\overline{v}dx,\ u,v \in H,$$

$$L(v) = \int_\Omega f\overline{v}dx + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}dx,\ v \in H$$

$\int\limits_{\partial\Omega} g\overline{v}dx$ est définie car l'application de trace se prolonge en application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, $\exists c > 0$, $\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$.
Il est important de remarquer que la condition aux limites s'insère ici de manière naturelle dans la formulation variationnelle et n'est pas incluse dans l'espace fonctionnel, la situation est donc différente du cas des conditions aux limites de Dirichlet pour lesquelles on tient compte de ces conditions dans l'espace fonctionnel de Hilbert.
a est bien définie bilinéaire continue sur $H^1(\Omega)$. Dès que $f \in L^2(\Omega)$, L aussi puisque $g \in L^2(\partial\Omega)$, L est linéaire et trivialement continue car d'après le théorème de trace si $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

A ce stade il est important de remarquer que le problème $(\mathcal{P}_N)$ peut avoir de solution que si f et g vérifient la condition de compatibilité (prendre $v = 1 \in H^1(\Omega)$)

$$\int\limits_{\Omega} f dx + \int\limits_{\partial\Omega} g dx = 0.$$

Un second point à noter est que si u est solution de $(\mathcal{P}_N)$, $(u +$ constante est aussi solution de $(\mathcal{P}_N)$. Il n'y a pas donc unicité de la solution sans restreindre l'espace fonctionnel, on introduit par exemple l'espace $V = \{u \in H^1(\Omega) \ / \int\limits_{\Omega} u(x)dx = 0\}$.
$u_1 - u_2 = c$, $\int\limits_{\Omega}(u_1 - u_2)dx = \int\limits_{\Omega} u_1 dx - \int\limits_{\Omega} u_2 dx = 0 = c$, d'où $u_1 = u_2$.
V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, donc V est Hilbert comme noyau de la forme linéaire continue $h(u) = \int\limits_{\Omega} u(x)dx$ sur $H^1(\Omega)$.
On reformule alors le problème de Neumann $(\mathcal{P}_N)$ sur $H = V$.
a est coercive sur V d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger:

$$\forall u \in V,\ a(u,u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{c}\|u\|_{L^2(\Omega)}$$

or

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\|u\|^2_{L^2(V)} &= \frac{1}{c}(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})\\ &\leq a(u,u) + \frac{1}{c}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = (1 + \frac{1}{c})\|u\|^2_V.\end{aligned}$$

D'où, $a(u,u) \geq \frac{1}{c(1+\frac{1}{c})}\|u\|^2_{L^2(V)}$.
Donc le problème $(\mathcal{P}_N)$ admet une solution unique $u \in V$ telle que $a(u,v) = L(v)$.
En particulier, en prenant $\overline{v} = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et en tenant compte que $\omega = (\varphi - \frac{1}{vol(\Omega)}\int\limits_{\Omega}\varphi(x)dx) \in V$, on trouve que $-\Delta u = f$ au sens des distributions et alors $u \in H^2(\Omega)$.

F- Soit à résoudre le problème de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0;1[, \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta. \end{cases}$$

On fixé u_0 une fonction régulier avec $u_0(0) = \alpha$ et $u_0(1) = \beta$ et on effectue le changement de variable. $\widetilde{u} = u - u_0$, alors $\widetilde{u}$ vérifie le problème de Dirichlet homogène suivant:

$$\begin{cases} -\widetilde{u}'' = f & \text{sur }]0;1[, \\ \widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

et on se ramène au problème de Dirichlet homogène.

G- Par la même technique on montre que si Ω est un ouvert borné et si $Re\ c > 0,\ f \in L^2(\Omega)$, il existe une et une seule solution $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (\nabla u \overline{\nabla v} + cu\overline{v})dx = \int_\Omega f(x)\overline{v}(x), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

qui est aussi solution distribution de l'équation $-\Delta u + cu = f$. On remarque que $\Delta u = cu - f \in L^2(\Omega)$ donc $u \in H^2(\Omega)$, ce qui permet de gagner un degré de régularité sur la solution u.

3.5 Régularité des solutions

Toute solution classique est solution faible, le passage d'une solution faible à une solution classique exige plus de régularité de la solution faible. Les principaux résultats de régularité sont les suivants:

Théorème 3.5.1 ***Théorème de régularité pour le problème de Dirichlet [2].***
Soit Ω un ouvert borné de bord $\partial\Omega$ de classe C^2 ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, telles que:

$$\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} + \int_\Omega u\overline{v} = \int_\Omega f\overline{v}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors

$$u \in H^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

(c est une constante positive ne dépendant que de Ω.)
De plus, si Ω est de classe C^{m+2} et si $f \in H^m(\Omega)$, alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ avec $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$, en particulier si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (ici la solution faible devient classique).
Enfin, si Ω est de classe C^∞ et si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Remarque 3.5.1 *Avec les mêmes hypothèses, on obtient les mêmes conclusions pour la solution du problème de Neumann:*

$$\int_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} dx = \int_\Omega f\overline{v} + \int_{\partial\Omega} g\overline{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

3.6 Étude spectrale du Laplacien

Théorème 3.6.1 *Soit Ω un ouvert borné de classe C^∞ de $\mathbb{R}^N$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ telles que*

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \\ -\Delta e_n = \lambda_n e_n \text{ sur } \Omega. \end{cases}$$

On dit que les (λ_n) sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet et que les $(e_n)_n$ sont les fonctions propres associées.

Preuve 3.6.1 *Étant donnée $f \in L^2(\Omega)$, on note $u = Tf$ l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel $a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \overline{\nabla v} dx = \int\limits_\Omega f\overline{v}dx = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$.*

On considéré $S = JT$ l'opérateur correspondant de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, où J est l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

T est linéaire continue de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ car on a:

$$a(Tf, v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donc en prenant $u = v = Tf$, on obtient:

$$c\|Tf\|^2_{H_0^1} \leq a(Tf, Tf) = |\langle f, Tf\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)}$$

ou bien $\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{c}\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

S est par conséquent un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. Vérifions maintenant que S est auto-adjoint donc symétrique sur $L^2(\Omega)$. On pose $u = Tf,\ v = Tg$ où $f, g \in L^2(\Omega)$, on a alors

$$\begin{aligned}\langle f, Sg\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle f, Tg\rangle_{L^2(\Omega)} = a(Tf, Tg) = \overline{(Tg, Tf)}\\ =&\overline{\int\limits_\Omega g\overline{Tf}dx} = \overline{\langle g, Tf\rangle}_{L^2(\Omega)} = \langle Tf, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Sf, g\rangle_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'autre part, $\forall f \in L^2(\Omega)$, on a:

$$\langle Sf, f\rangle = \langle f, Sf\rangle = \langle f, Tf\rangle = a(Tf, Tf) \geq c\|Tf\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

En conséquent, il existe une suite décroissante des valeurs propres de S des réels positifs $(\mu_k)_{k\geq 1}$ tendant vers 0 et une base hilbertienne $(e_k)_{k\geq 1}$ constituée des vecteurs propres de S associées aux valeurs propres correspondantes $(\mu_k)_{k\geq 1}$ c'est à dire $Se_k = \mu_k e_k,\ \forall k \geq 1$.

D'où $e_k \in L^2(\Omega),\ \forall k \geq 1$. Or, $Se_k = Te_k = \mu_k e_k \in H_0^1(\Omega)$ donc $e_k \in H_0^1(\Omega),\ \forall k \geq 1$.

On a aussi $a(Te_k, v) = \langle e_k, v\rangle_{L^2(\Omega)}$ ie,

$$\int\limits_\Omega \nabla e_k \nabla \overline{v} dx = \frac{1}{\mu_k}\int\limits_\Omega e_k a\overline{v} dx,\ \ \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall k \geq 1.$$

Autrement dit e_k est une solution faible de l'équation $-\Delta e_k = \lambda_k e_k$ avec $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k} > 0$, et $\lambda_k \underset{k\to+\infty}{\to} +\infty$. On sait que $e_k \in H^2(\Omega)$, en appliquant (Δ) à l'équation $-\Delta e_k = \lambda_k e_k$ on a aussi $e_k \in H^4(\Omega)$ en réitérant ce procédé il vient que $e_k \in \bigcap\limits_{m\geq 1} H^m(\Omega) = C^\infty(\Omega)$.

Chapitre 4

Problème d'évolution pour l'équation de la Chaleur et l'équation des Ondes

Les équations de la chaleur et des ondes sont des équations aux dérivées partielles qui modélisent respectivement la propagation de la chaleur et des ondes dans un milieu donné. Cependant, ces équations posent un problème d'évolution, c'est-à-dire qu'elles décrivent l'évolution d'un phénomène dans le temps. Ce problème d'évolution peut être difficile à résoudre analytiquement en raison de la complexité des équations et des conditions aux limites qui y sont associées. Pour résoudre ce problème, on peut utiliser des techniques d'analyse fonctionnelle pour étudier l'existence et l'unicité des solutions des équations de la chaleur et des ondes, ainsi que leur stabilité et leur convergence.
Utilisons les définitions suivantes: $T > 0$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $C^0([0;T], L^2(\Omega))$ (resp C^1) est l'espace des fonctions $v(t,x)$ telles que pour $t \in [0;T]$, $v(t,.) \in L^2(\Omega)$ et l'application qui à t associe $v(t,.)$ est continue (C^1) de $[0;T]$ dans $L^2(\Omega)$. Il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty([0;T],L^2(\Omega))} = \sup_{0\leq t\leq T} \|v(t,.)\|_{L^2(\Omega)}$$

(resp $\|v\|_{L^\infty} + \|v'\|_{L^\infty}$) qui en fait un espace de Banach.
L'espace $L^2([0;T], H_0^1(\Omega))$ est l'espace des fonctions $v(t,x)$ telles que pour presque tout $t \in [0;T]$, $v(t,.) \in H_0^1(\Omega)$ et $\int_0^T \|v(t,.)\|^2_{H_0^1} dt < \infty$.
Il est muni de la norme:

$$\|v\|^2_{L^2([0;T],H_0^1(\Omega))} = \int_0^T \|v(t,.)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

pour lequel c'est un espace de Banach.

Définition 4.0.1 *soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non bornée.*
On dit que A est monotone si $\langle Av, v\rangle \leq 0$, $\forall v \in D(A)$. A est maximal monotone si de plus $Im(I + A) = H$, c'est à dire $\forall f \in H$, $\exists u \in D(A)$ tel que $u + Au = f$.
Le résultat suivant est un outil très efficace pour la résolution des EDP d'évolution.

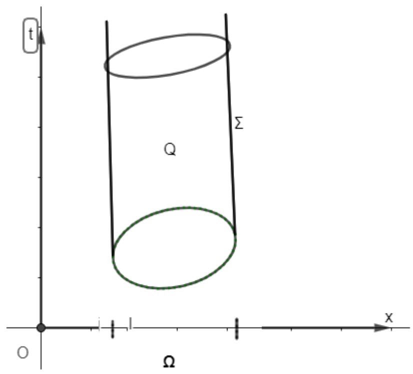
Théorème 4.0.1 *(théorème de Hille-Yoshida[6])*
Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction $u \in C^1(]0;+\infty[, H) \cap C(]0;+\infty[, D(A))$ unique solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & sur\ \ ]0;+\infty[, \\ u(0) = u_0\ (donné\ initiale). \end{cases}$$

De plus on a $\forall t \geq 0$:

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \text{ et } \|\frac{du}{dt}(t)\| = \|Au(t)\| \leq \|Au_0\|.$$

Grâce au théorème de Hille-Yosida on peut maintenant montrer un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de la chaleur (équation parabolique).
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *de frontière* $\partial\Omega$ *de classe* C^∞ *et borné. On note* $Q = \Omega\times]0;+\infty[$ *et* $\Sigma = \partial\Omega\times]0;+\infty[$ *la frontière latérale du cylindre* Q.



On considère le problème suivant: Trouver $u(x,t)$ définie de $\overline{\Omega} \times [0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation de la chaleur, la condition initiale et les données aux limites:

$$(\mathcal{P}_C) \begin{cases} \frac{du}{dt} + \Delta u = 0 & \text{sur } Q, \\ u(0) = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \partial x_i^2$, t est la variable de temps.$u(x,t)$ est définie de $[0;+\infty[$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ qui dépend seulement de la variable d'espace $x \in \Omega$. Ainsi $u(x,t) = u(t)$ désigne un élément de H. L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ modélise la distribution de la température u dans le domaine Ω à l'instant t.

Théorème 4.0.2 *On suppose que* $u_0 \in L^2(\Omega)$. *Alors il existe une fonction* $u(x,t)$ *unique solution du problème* $(\mathcal{P}_C)$ *et* $u \in C^1(]0;+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0;+\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

Preuve 4.0.1 *On introduit l'opérateur non bornée sur* $L^2(\Omega)$, $Au = -\Delta u$, *de domaine* $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.
Il est important de noter que l'on impose la condition aux limites $u|_\Sigma = 0$ *dans la définition du domaine de* A ($u = 0$ *sur* $\partial\Omega$). A *monotone car* $\forall u \in D(A)$:

$$\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega -\Delta u\overline{u} dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0.$$

De plus A *est maximal monotone car* $Im(I + A) = L^2(\Omega)$. *En effet, on sait que* $f \in L^2(\Omega)$ *il existe* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *unique solution de l'équation* $-\Delta u + u = f$ *(voir l'exemple G avec* $c = 1$ *et aussi le théorème de régularité des solutions faibles.)*
Donc en appliquant le théorème de Hille-Yosida on obtient une solution unique $u(x,t)$ *du problème* $(\mathcal{P}_C)$ *où* $u \in C^1(]0;+\infty[, L^2(\Omega)) \cap C([0;+\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $\forall t \geq 0$, *on a*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\frac{d}{dt}u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|-\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|-\Delta u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

Remarque 4.0.1 *1. Si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, alors la solution de $(\mathcal{P}_C)$ vérifie*

$$u \in C^1(]0;+\infty[, H_0^1(\Omega)) \cap L^2([0;+\infty[, D(-\Delta) = \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega);\ \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}).$$

2. Si $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, alors la solution de $(\mathcal{P}_C)$

$$; u \in C^1(]0;+\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0;+\infty[,$$

$$D(-\Delta) = \{u \in H^4(\Omega);\ u \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}).$$

Pour les preuves le livre de Bresis [2], pages 207-209.

3. Lorsque Ω est borné, le problème $(\mathcal{P}_C)$ peut être résolu par décomposition sur une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$. A cet effet, il est très commande de choisir une base $(e_k)_{k\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$.
Constitué des fonctions propres de $-\Delta$:

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \lambda_k e_k & \text{sur } \Omega \\ e_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On cherche la solution de $(\mathcal{P}_C)$ sous la forme $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e_k(x)$. Alors, on a nécessairement

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e_k(x) = \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)(-\lambda_k e_k(x)).$$

Donc $a_k'(t) + \lambda_k a_k(t) = 0$, d'où $a_k(t) = a_k(0)e^{-\lambda_k t}$ et les conditions $a_k(0)$ sont déterminées à partir de la condition initiale $u_0(x)$:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) e_k(x) = u_0(x)$$

c'est à dire les $a_k(0)$ sont les composantes de $u_0(x)$ dans la base $(e_k(x))_{k\geq 1}$.

Exercice 4.0.1 *Résoudre le problème de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dans } [0;T]\times]0;1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \forall t \in [0;T] \\ u(0,x) = 1 & x \in]0;1[. \end{cases}$$

On sait que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) e^{-\lambda_k t} e_k(x)$ où $e_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$ sont les vecteurs propres normalisés de $-\Delta$ dans $L^2(]0;1[)$ associés aux valeurs propres $\lambda_k = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. $u(t,x)$ vérifie les conditions aux limites.
La condition initiale donne $1 = u(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) e_k(x)$. D'où, $1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} a_k(0) \sin k\pi x$ avec $b_k = \sqrt{2} a_k(0)$ sont les coefficients du développement en série de Fourier sinus de la fonction constante égale à 1 sur $]0;1[$.
Soit f le prolongement impair 2-périodique sur $]-1;1[$ de la fonction 1 :

$$\begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ -1 & , \quad -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

Alors, $\forall x \in]-1;1[,\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\sin k\pi x$ *où* $b_k = 2\int_0^1 \sin(k\pi x)dx = \frac{2(1-\cos k\pi)}{k\pi},\ b_{2k} = 0,\ b_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}$.
En conclusion,

$$\forall x \in]0;1[,\ 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi x}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\sqrt{2}\sin k\pi x.$$

Par identification, on a

$$a_{2k} = 0 \text{ et } a_{2k+1}(0) = \frac{4}{\pi\sqrt{2}(2k+1)},\ k \in \mathbb{N}.$$

Finalement, la solution du problème est donnée par

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\sin(2k+1)\pi x}{\pi(2k+1)}e^{-\pi^2(2k+1)^2 t}.$$

On établit dans ce qui suit un résultat similaire pour l'équation des ondes (cas hyperbolique). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^∞ et bornée. Comme précédemment $Q = \Omega\times]0;\infty[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0;+\infty[$. On cherche $u(x,t) : \overline{\Omega}\times]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant le problème de propagation des ondes à l'instant t dans un milieu homogène Ω.

$$(\mathcal{P}_O)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{sur } Q \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Théorème 4.0.3 *On suppose que* $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ *et que* $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. *Alors il existe une solution unique de* $(\mathcal{P}_O)$ *avec*

$$u \in C([0;+\infty[, H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0;+\infty[, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(]0;+\infty[, L^2(\Omega)).$$

De plus, on a:

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)},\ \forall t \geq 0.$$

Cette égalité exprime une loi de conservation montrant que l'énergie du système reste invariante au cours du temps.
Écrivons l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ *sous la forme d'un système du premier ordre:*

$$(E_1)\begin{cases} v = \frac{\partial u}{\partial t} & sur\ \ Q \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & sur\ \ Q \end{cases}$$

et on pose $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ *de sorte que* (E_1) *devient*

$$(E_2) \qquad \frac{dU}{dt} - AU = 0$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$ *ie* $AU = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}$. $U(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}$.
On applique maintenant le théorème de Hille-Yosida dans l'espace de Hilbert $H = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ *muni du produit scalaire:*

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2(\Omega)}$$

où $U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
On considère l'opérateur $A : D(A) \subset H \to H$ *défini précédemment de domaine* $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$.
Notons que les conditions aux limites $u = 0$ *sur* Σ *sont incorporées dans* $D(A)$, *il reste aussi que* $v = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ *sur* Σ. *En posant* $U(t) = e^t V(t)$, *il est facile de voir que le système*

$$(E_3) \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = 0 & \textit{sur } [0; +\infty[\\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

est équivalent au système

$$(E_4) \begin{cases} \frac{dV}{dt} + (A+I)V = 0 & \textit{sur } [0; +\infty[\\ V(0) = U(0) = \begin{pmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Vérifions que $(A + I)$ *est un opérateur maximal monotone dans* H.

i) $(A + I)$ *est monotone, en effet si* $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$,
on a,

$$\begin{aligned} \langle (A+I)V, V \rangle_H &= \langle AV, V \rangle_H + \langle V, V \rangle_H \\ &= -\int_\Omega v\overline{u}dx - \int_\Omega \nabla v \overline{\nabla u} dx + \int_\Omega (-\Delta u)\overline{v} dx + \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx \\ &= -\int_\Omega v\overline{u}dx + \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a:

$$-\int_\Omega v\overline{u}dx \geq -\|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \geq -\frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{2} - \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{2}$$

c'est à dire,

$$\langle (A+I)V, V \rangle_H \geq \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{2} + \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{2} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

ii) $(A + I)$ *est maximal monotone, il suffit de vérifier que* $(A + 2I)$ *est surjectif. Étant donné* $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, *on doit donc résoudre l'équation* $AU + 2U = F$, *c'est à dire le système*

$$\begin{cases} -v + 2u = f & \textit{sur } \Omega \\ -\Delta u + 2v = g & \textit{sur } \Omega \end{cases}$$

avec $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et* $v \in H_0^1(\Omega)$.
On en déduit de ce dernier système que

$$-\Delta u + 4u = 2f + g \;\; sur \;\; \Omega.$$

Or, d'après l'exemple G avec $c = 4$, *cette equation admet une solution unique* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *ensuite* $v = 2u - f \in H_0^1(\Omega)$.
En appliquant maintenant le théorème de Hille-Yosida, on voit qu'il existe une solution unique U *du système* E_3, *avec*

$$U \in C^1(]0;+\infty[, H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \cap C([0;+\infty[, D(A)) \qquad (*)$$

puisque $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A)$.
En interprétant $(*)$, *on obtient la régularité* C^2 *de* u. $\left(U = \begin{pmatrix} u \\ v = \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \in C^1 \Rightarrow C^2 \right)$.
Pour terminer la preuve, multiplions l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ *par* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *et intégrons sur* Ω, *on a:*

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

et

$$\int_\Omega (-\Delta u) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (\nabla u)^2 dx.$$

D'où,

$$0 = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \right) \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (\nabla u)^2 dx,$$

ou bien,

$$\frac{\partial}{\partial t} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\partial}{\partial t} \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

En intégrant cette égalité de 0 *à* $t \geq 0$, *on a*

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{L^2(\Omega)} - \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} - \| \nabla u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

D'où,

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^2(\Omega)} = \| v_0 \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla u_0 \|^2_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Remarque 4.0.2 *Lorsque* Ω *est borné le problème* $(\mathcal{P}_O)$ *peut être résolu comme l'équation de la chaleur par décomposition sur une base hilbertienne.*
On choisit la base hilbertienne $(e_k(x))_{k \geq 1}$ *de* $L^2(\Omega)$ *constituée des fonctions propres de* $(-\Delta)$ *avec conditions de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \lambda_k e_k \quad sur \;\; \Omega \\ e_k|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Notons que $\lambda_k > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. *On cherche la solution de* $(\mathcal{P}_O)$ *sous la forme*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e_k(x).$$

On a nécessairement

$$a_k''(t) + \lambda_k a_k(t) = 0, \quad k > 0, \ t \geq 0.$$

D'où,

$$a_k(t) = a_k(0)\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{a_k'(0)}{\sqrt{\lambda_k}}\sin(\sqrt{\lambda_k}t).$$

Les constantes $a_k(0)$ et $a_k'(0)$ sont déterminées à partir des relations

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)e_k(x)$$

$$v_0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(0)e_k(x)$$

donc ce sont les composantes de u_0 et v_0 dans la base $(e_k(x))_{k\geq 1}$.

Exemple 4.0.1 *Résoudre le problème aux limites de l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{dans } [0;T]\times]0;1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & \forall t \in [0;T] \\ u(0,x) = 1, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 & \text{sur }]0;1[. \end{cases}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k(0)\cos(\sqrt{\lambda_k}t) + \frac{a_k'(0)}{\sqrt{\lambda_k}}\sin(\sqrt{\lambda_k}t)\right)e_k(x).$$

$$\begin{cases} e_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x, & k \geq 1 \\ \lambda_k = k^2\pi^2, & k \geq 1. \end{cases}$$

$$u_0(x) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\sqrt{2}\sin k\pi x$$

$$v_0(x) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k'(0)\sqrt{2}\sin k\pi x.$$

$a_{2k} = 0, \ a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi\sqrt{2}}, \ a_k'(0) = 0, \ k \geq 1.$

$$u(t,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi t \sin(2k+1)\pi t}{2k+1}.$$

Bibliographie

[1] R. A. Adams. *Sobolev Spaces, Academic press*, New York (1975).

[2] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*. Masson (1983).

[3] C. Zuily. *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Ellipse (2010).

[4] B. Messirdi, A. Gherbi and S. Messirdi. *Distributions: théorie et illustrations - Cours avec 155 exercices corrigés,* Ellipse (2022).

[5] Dautray Lions, Robert Lions and Jacques Louis *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology Volume 1, Physical Origins and Classical Methods,* Springer Verlag, (1991).

[6] K. Yoshida *functional analysis*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, (1980).